Ćwiczenie 1

Temat: Identyfikacja modeli statycznych metodą najmniejszych kwadratów (MNK)

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobem identyfikacji modeli statycznych, liniowych, parametrycznych prostych obiektów sterowania w środowisku MATLAB przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów (MNK).

Wprowadzenie

Jeśli rozpatrywane są jedynie statyczne własności obiektów sterowania, to określany jest model statyczny obiektu, który opisuje zależność między wielkościami wejściowymi i wyjściowymi obiektu w stanie ustalonym.

Rys. 1. Schemat blokowy obiektu sterowania o jednym wyjściu.

W przypadku, gdy rozpatrywany system ma s wejść: u_1, u_2 ,..., u_s i jedno wyjście y (rys. 1) identyfikowany obiekt opisany jest zależnością:

$$y = f(u_1, u_2 \ldots, u_s) + z, \tag{1}$$

gdzie: f – funkcja opisująca zachowanie się obiektu w zależności od wektora sterowań $\underline{\mathbf{u}}$,
z – zakłócenia.

Gdy znana jest charakterystyka statyczna obiektu z dokładnością do parametrów, tj. znana jest postać funkcji F:

$$y = F(u_1, u_2, \ldots, u_s, \underline{\mathbf{a}}), \tag{2}$$

gdzie: $\underline{\mathbf{a}} = [a_1, a_2 \ldots a_r]^T$ – r-wymiarowy nieznany wektor parametrów,
to zadanie identyfikacji polega na wyznaczeniu tych parametrów na podstawie wyników n pomiarów wejścia i wyjścia obiektu:

$$\mathbf{U}_n = [\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n], \qquad \mathbf{Y}_n = [y_1, y_2, \ldots, y_n]. \tag{3}$$

Algorytm identyfikacji:

$$\underline{\mathbf{a}} = \Psi(\mathbf{U}_n, \mathbf{Y}_n), \tag{4}$$

możliwy jest do uzyskania poprzez rozwiązanie układu równań:

$$y_i = F(\mathbf{u}_i, \mathbf{a}) \quad i = 1, 2 \ldots r \tag{5}$$

przy założeniu, że nie ma zakłóceń. W rzeczywistości zakłócenia jednak występują i w związku z tym nie jest możliwe wyznaczenie algorytmu identyfikacji w taki sposób.

Gdy nie jest znana charakterystyka statyczna obiektu, w procesie identyfikacji należy znaleźć strukturę i parametry modelu (statycznego, liniowego, parametrycznego).

Model obiektu i jego identyfikacja

Model obiektu sterowania opisany jest zależnością:

$$\overline{y} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{u}} \tag{6}$$

gdzie: $\underline{\mathbf{u}}^T = [1, u_1, u_2, ..., u_s]$ – wektor sterowań; $\underline{\mathbf{a}}^T = [a_0, a_1, a_2, ..., a_s]$ – wektor parametrów.

Przy nieznanej postaci funkcji opisującej charakterystykę statyczną obiektu sterowania w czasie identyfikacji wybierana jest najlepsza struktura modelu, który zgodnie z założeniami ćwiczenia należy do klasy modeli statycznych, liniowych, parametrycznych. W efekcie winno nastąpić ustalenie stopnia wielomianu w równaniu modelu (6) oraz wartości parametrów $\underline{\mathbf{a}}$, dla których założone kryterium jakości identyfikacji osiąga minimalną wartość przy danych pomiarowych (3).

Identyfikacja z wykorzystaniem MNK

Jedną z podstawowych metod identyfikacji jest MNK. Polega ona na szukaniu najlepszego modelu obiektu sterowania poprzez minimalizację wartości funkcji kryterialnej

$$Q_n = e\, e^T$$

gdzie:

$$\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{Y}_n - \overline{\mathbf{Y}}_n . \tag{10}$$

Rozwiązaniem zadania poszukiwania minimum funkcji Q_n ($\underline{\mathbf{e}}\, \underline{\mathbf{e}}^T$) jest:

$$\underline{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T\right)^{-1} \mathbf{U}_n \mathbf{Y}_n^T , \tag{11}$$

przy założeniu, że rank($\mathbf{U}_n$) = s + 1.

Wzór (11) określa algorytm identyfikacji.

Dokładność modelu

Deterministyczne kryterium oceny poprawności modelu zakłada wykorzystanie tzw. stosunku korelacyjnego:

$$\eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i - y_s\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_s\right)^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_s\right)^2} , \tag{12}$$

gdzie: $y_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i$.

Gdy stosunek korelacyjny jest równy 1, wynik identyfikacji uważany jest za najlepszy.

Przebieg ćwiczenia

1. Napisać procedury obliczania wyjścia obiektów sterowania, gdy znane są sygnały wejściowe oraz parametry charakterystyk statycznych obiektów. Przyjąć, że charakterystyki te są następujące:

$$y = a_0 + a_1 u_1 , \tag{13}$$

$$y = a_0 u_1 + a_1 u_2 , \tag{14}$$

$$y = a_0 u_1 + a_1 u_2^2 , \tag{15}$$

$$y = a_0\, \mathrm{e}^{a_1 u_1} , \tag{16}$$

$$y = a_0 a_1 \sin u_1 . \tag{17}$$

2. Zaprogramować w programie MATLAB algorytm MNK.
3. Zidentyfikować parametry wybranych modeli
   - w warunkach braku obecności jakichkolwiek zakłóceń,
   - w warunkach obecności zakłócenia dodającego się do sygnału wyjściowego opisanego za pomocą rozkładu normalnego.
4. Określić jakość dopasowania modelu poprzez obliczenie stosunku korelacyjnego (zależność (12)) dla każdego z rozpatrywanych przypadków obecności zakłóceń.

Sprawozdanie

Elementy składowe sprawozdania:

- Krótka charakterystyka celu i zakresu ćwiczenia,
- Schemat blokowy modelowanego obiektu sterowania wraz z oznaczeniami,
- Zestawienie wykorzystywanych w obliczeniach wzorów,
- Wyniki obliczeń komputerowych ujęte w formie tabelarycznej i wyniki ręcznych przekształceń symbolicznych,
- Dyskusja otrzymanych wyników i wnioski (w szczególności zwrócić uwagę na wartość współczynnika korelacyjnego dla rozpatrywanych przypadków obecności zakłóceń).