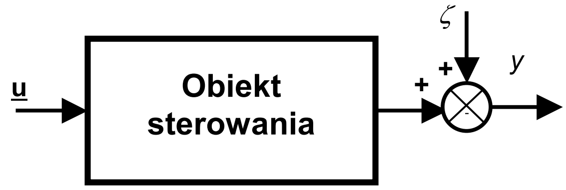
Ćwiczenie 2

Temat: Identyfikacja modeli statycznych metodą najmniejszych kwadratów (MNK) –analiza statystyczna wyników identyfikacji

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie identyfikacji parametrów modelu wybranego obiektu sterowania, ocena poprawności modelu i analiza statystyczna uzyskanych wyników identyfikacji.



Rys. 1. Schemat blokowy obiektu sterowania o jednym wyjściu.

Wprowadzenie

Zakłada się, że charakterystykę statyczną obiektu z rys. 1 opisuje równanie (model regresji liniowej):

$$y = \underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{u}} + \zeta\,, \tag{1}$$

przy czym ζ jest zakłóceniem.

Obiekt posiada s wejść ($\underline{\mathbf{u}} = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_s]^T$) i jedno wyjście. Biorąc pod uwagę obserwacje z n kolejnych dyskretnych chwil można napisać

$$\mathbf{Y}_n = \underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \mathbf{U}_n + \mathbf{Z}_n\,, \tag{2}$$

przy czym $\mathbf{Z}_n$ jest wektorem zakłóceń, którego składowe są traktowane jako niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym i zerowej wartości oczekiwanej

$$E(\mathbf{Z}_n) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Dla wektora $\mathbf{Z}_n$ macierz kowariancji ma postać następującą

$$\operatorname{cov}(\mathbf{Z}_n) = E\left(\mathbf{Z}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}_n\right) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2 \end{bmatrix} = I\sigma^2\,. \tag{4}$$

Otrzymane przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów oceny nieznanych parametrów $\underline{\alpha}$

$$\underline{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{U}_n \mathbf{Y}_n^T\,, \tag{5}$$

są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym.

Deterministyczne kryterium oceny poprawności modelu

Do deterministycznej oceny poprawności modelu można wykorzystać stosunek korelacyjny:

$$\eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i - y_s\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_s\right)^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_s\right)^2}, \tag{6}$$

gdzie: $y_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i$.

$\sum_{i=1}^{s}\left(y_i - y_s\right)^2$ - zmienność wielkości wyjściowej obiektu,

$\sum_{i=1}^{s}\left(\overline{y}_i - y_s\right)^2$ - zmienność wielkości wyjściowej modelu.

Analiza statystyczna modelu

Wariancja resztowa $E(e\,e^T)$ ($e = y - \overline{y}$) jest określona za pomocą wzoru:

$$E\left(ee^T\right) = \sigma^2\left(n - s - 1\right), \tag{7}$$

gdzie $(n - s - 1)$ - liczba stopni swobody,

Ze wzoru (7) wynika, że wariancja zakłóceń (składnika losowego) σ^2 może być obliczona następująco

$$\sigma^2 = \frac{E\left(ee^T\right)}{n - s - 1}. \tag{8}$$

Nieobciążony estymator wariancji składnika losowego σ^2 wyznaczany jest ze wzoru

$$S^2 = \frac{1}{n - s - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i - y_s\right)^2. \tag{9}$$

Kowariancja wektora współczynników funkcji regresji jest następująca:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(a_0) & \operatorname{cov}(a_0, a_1) & \dots & \operatorname{cov}(a_0, a_s) \\ \operatorname{cov}(a_1, a_0) & \operatorname{var}(a_1) & \dots & \operatorname{cov}(a_1, a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(a_s, a_0) & \operatorname{cov}(a_s, a_1) & \dots & \operatorname{var}(a_s) \end{bmatrix} = \left(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T\right)^{-1}\sigma^2, \tag{10}$$

a jej estymator jest dany zależnością:

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \left(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T\right)^{-1} S^2 = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0s} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s0} & c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix} S^2. \tag{11}$$

Elementy na głównej przekątnej macierzy (11) są estymatorami wariancji współczynników a_i (i = 0, 1, 2, …, s). Ze wzoru (11) wynika, że w ogólnym przypadku współczynniki a_i (i = 0, 1, 2, …, s) są ze sobą skorelowane. Przy planowaniu doświadczeń zwykle dąży się do tego, by macierz (11) była macierzą diagonalną.

Współczynniki a_i (i = 0, 1, 2, …, s) są zmiennymi losowymi liniowo zależnymi od wyjścia y. Wynika stąd, że gdy y ma rozkład normalny, współczynniki a_i również mają rozkład normalny. Standardowy błąd oceny parametru a_i (i = 0, 1, 2, …, s) opisuje równanie:

$$S_{ai} = S\sqrt{c_{ii}} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, s. \tag{12}$$

Przedziały ufności dla parametrów funkcji regresji a_i (i = 0, 1, 2, …, s) na poziomie ufności $1-\alpha$ i przy liczbie stopni swobody $n-s-1$ są następujące:

$$a_i - t_{kryt} S\sqrt{c_{ii}} < \alpha_i < a_i + t_{kryt} S\sqrt{c_{ii}}\ , \tag{13}$$

gdzie: t_{kryt} – liczba wyznaczana z tablic rozkładu t–Studenta dla poziomu ufności $1-\alpha$ i liczby stopni swobody $n-s-1$ (patrz tab. 1 w dodatku).

Przebieg ćwiczenia

1. Dla zadanego zbioru n obserwacji obiektu sterowania o s wejściach i jednym wyjściu (pliki **u.txt** i **y.txt**) dokonać identyfikacji modelu obiektu metodą MNK.
2. Wyznaczyć miarę dopasowania modelu, tj. stosunek korelacyjny. Obliczyć estymator wariancji resztowej oraz estymatory wariancji i przedziały ufności współczynników modelu dla poziomu ufności $1 - \alpha = 0,95$.

Uwaga: Wszystkie obliczenia należy zaprogramować i wykonać w środowisku MATLAB.

Sprawozdanie

Podstawowe elementy składowe sprawozdania:

– krótka charakterystyka celu i zakresu ćwiczenia,
– schemat blokowy modelowanego obiektu sterowania wraz z oznaczeniami,
– zestawienie wykorzystywanych w obliczeniach wzorów,
– wyniki obliczeń komputerowych w formie tabelarycznej (w szczególności stosunek korelacyjny, wariancja resztowa oraz wariancje i przedziały ufności współczynników modelu dla rozważanych przypadków),
– wykresy obrazujące uzyskane wyniki obliczeń: charakterystyki statyczne z zaznaczonymi przedziałami ufności ,
– dyskusja otrzymanych wyników i wnioski.

Dodatek

Tab. 1. Kwantyle rozkładu t-Studenta dla N stopni swobody i poziomu ufności $1–\alpha = 0,95$ (przypadek dwustronny).

N	t dla $1 - \alpha = 0,95$	N	t dla $1 - \alpha = 0,95$
1	12,70	10	2,23
2	4,30	11	2,20
3	3,18	12	2,18
4	2,78	13	2,16
5	2,57	14	2,14
6	2,45	15	2,13
7	2,36	16	2,12
8	2,31	17	2,11
9	2,26	≥ 18	$\approx 2,10$