Ćwiczenie 3

Temat: Identyfikacja modeli statycznych. Planowanie czynnych eksperymentów identyfikacyjnych

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zaplanowanie i przeprowadzenie czynnego eksperymentu identyfikacyjnego obiektu sterowania opisanego liniową charakterystyką statyczną.

Wprowadzenie

W zadaniach identyfikacji będących przedmiotem poprzednich ćwiczeń przyjmowano założenie, że wejścia obiektu są deterministyczne. Przy tym założeniu, gdy możliwe jest przeprowadzenie czynnego eksperymentu identyfikacyjnego, możliwe jest ustalenie wartości wielkości wejściowych obiektu przed przystąpieniem do obserwacji wyjść obiektu.

Jednym z etapów badań doświadczalnych, mających na celu identyfikację modelu obiektu w rozpatrywanym przypadku, jest wyznaczenie zbioru punktów pomiarowych, czyli generacja lub wybór planu eksperymentu.

Pojedynczy punkt pomiarowy, będący s–wymiarowym wektorem wartości wielkości wejściowych, nazywany jest **układem planu eksperymentu**, natomiast zbiór wszystkich punktów pomiarowych stanowi **plan eksperymentu**. W zapisie matematycznym plan eksperymentu stanowi macierz $\mathbf{U}_n$. Macierz $\mathbf{U}_n$ należy dobrać tak, aby zapewnić identyfikowalność obiektu, ułatwić obliczenia związane z wyznaczaniem parametrów modelu oraz zapewnić odpowiednie własności statystyczne wyznaczonych parametrów.

W przypadku planowania dwupoziomowego proponuje się ustalanie wartości poszczególnych wielkości wejściowych u_i na dwóch poziomach:

$$u_i = u_{i0} - \Delta u_i \quad \text{albo} \quad u_i = u_{i0} + \Delta u_i \,, \tag{1}$$

gdzie: u_{i0} – poziom podstawowy, będący (zwykle) średnią między wartością minimalną i maksymalną zmiennej u_i; Δu_i – odchylenie od poziomu podstawowego.

Wskazane wcześniej ograniczenie przedziałów u_i może być spowodowane koniecznością badania charakterystyki obiektu w pewnym określonym przedziale zmienności sterowań lub ograniczeniami technicznymi (np. dostępnymi zakresami pomiarowymi stosowanej aparatury).

Postępowanie przy rozpatrywanym czynnym eksperymencie czynnikowym zakłada zamianę zmiennych. Początek układu współrzędnych przenosi się do punktu centralnego $\underline{\mathbf{u}}_0^T = [u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{s0}]$ (s – liczba wejść obiektu), w otoczeniu którego przeprowadza się eksperyment.

Punkt centralny ma położenie środkowe w obszarze zmienności wartości sterowań i przy jego wyznaczaniu wykorzystywana jest zależność:

$$u_{i0} = \frac{u_{i\max} + u_{i\min}}{2} \,, \tag{2}$$

gdzie: $u_{i\max}$ – maksymalna wartość i-tego sterowania w rozważanym obszarze zmienności; $u_{i\min}$ – minimalna wartość i-tego sterowania w rozważanym obszarze zmienności.

Jednostkę zmienności wyznacza się ze wzoru:

$$\Delta u_i = \frac{u_{i\max} - u_{i\min}}{2} \,. \tag{3}$$

Poziom górny i-tego sterowania wyznacza się przez dodanie jednostki zmienności do współrzędnej punktu centralnego:

$$u_i(+1) = u_{i0} + \Delta u_i\,, \tag{4}$$

zaś poziom dolny przez odjęcie jednostki zmienności od współrzędnej tego punktu:

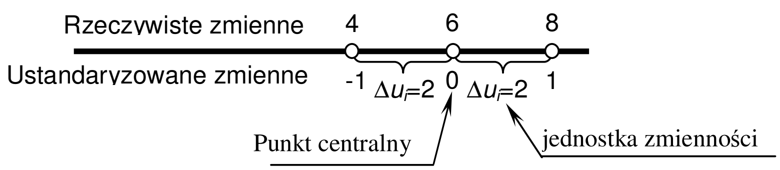
$$u_i(-1) = u_{i0} - \Delta u_i\,. \tag{5}$$

Równocześnie zmienia się skalę tak, aby planowane wartości zmian Δu_i były jednostkowe w nowym układzie współrzędnych, czyli by zmienne t_i

$$t_i = \frac{u_i - u_{i0}}{\Delta u_i}\,,\ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{6}$$

przyjmowały wartości: +1, –1.

Ilustrację pojęcia jednostki zmienności i punktu centralnego przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Przejście do ustandaryzowanych zmiennych.

Ogólna liczba wszelkich możliwych przypadków, które mogą wystąpić w całkowitym doświadczeniu czynnikowym wynosi $k = 2^s$. Przykładowo, plan całkowity eksperymentu dla trzech niezależnych zmiennych wejściowych t_1, t_2, t_3 ma postać:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Równanie modelu po standaryzacji zmiennych wejściowych ma postać:

$$y_i = \overline{\mathbf{K}}^T \mathbf{t}_i\,, \tag{8}$$

gdzie: $\overline{\mathbf{K}} = [\overline{K}_0, \overline{K}_1, ..., \overline{K}_s]^T$, oraz $\mathbf{t}_i = [1_0, t_{1i}, ..., t_{si}]^T$.

Macierz kowariancji współczynników standaryzowanego modelu określa wzór:

$$\mathrm{cov}(\overline{\mathbf{K}}) = \left(\Pi\Pi^T\right)^{-1}\sigma^2 = \mathbf{I}\frac{1}{n}\sigma^2\,, \tag{9}$$

przy czym wariancję zakłóceń σ^2 zastępuje się jej estymatorem.

Przykład

Sformułowanie zadania

Zidentyfikować model obiektu (wyznaczyć parametry modelu), wykorzystując całkowite doświadczenie czynnikowe. Przyjąć, że model obiektu jest o postaci:

$$\overline{y} = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2\,. \tag{10}$$

Zakresy zmienności sterowań są następujące:

$$2 \le u_1 \le 6\,,$$

$$4 \le u_2 \le 10\,.$$

Rozwiązanie zadania

Zgodnie z ideą branego pod uwagę doświadczenia na wstępie należy określić współrzędne punktu centralnego doświadczenia. Współrzędne te są następujące:

$$u_{10} = \frac{u_{1\max} + u_{1\min}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4\,,$$

$$u_{20} = \frac{u_{2\max} + u_{2\min}}{2} = \frac{10+4}{2} = 7\,.$$

Jednostki zmienności dla poszczególnych sterowań przybierają wartości:

$$\Delta u_1 = \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2\,,$$

$$\Delta u_2 = \frac{u_{2\max} - u_{2\min}}{2} = \frac{10-4}{2} = 3\,.$$

Dla ustalonego punktu centralnego i jednostek zmienności standaryzowanie zmienne są określone przez wzory

$$t_1 = \frac{u_1 - u_{10}}{\Delta u_1} = \frac{u_1 - 4}{2}, \qquad t_2 = \frac{u_2 - u_{20}}{\Delta u_2} = \frac{u_2 - 7}{3}. \tag{11}$$

Poziomy wartości dla poszczególnych sterowań są następujące:

a) poziom górny:

$$u_1(+1) = u_{10} + \Delta u_1 = 4 + 2 = 6, \qquad u_2(+1) = u_{20} + \Delta u_2 = 7 + 3 = 10\,,$$

b) poziom dolny:

$$u_1(-1) = u_{10} - \Delta u_1 = 4 - 2 = 2, \qquad u_2(-1) = u_{20} - \Delta u_2 = 7 - 3 = 4\,.$$

Całkowity plan czynnikowy eksperymentu dla dwóch rozpatrywanych zmiennych wejściowych na postać:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Dla przyjętego planu uzyskano następujące wyniki pomiarów wyjścia obiektu:

$$\mathbf{Y}_4 = [48 \quad 76 \quad 96 \quad 124].$$

Dla tych pomiarów na podstawie algorytmu MNK wyznaczony został wektor $\overline{\mathbf{K}}$ o postaci:

$$\overline{\mathbf{K}} = \left(\Pi\Pi^T\right)^{-1}\Pi\mathbf{Y}_n^T = \frac{1}{4}\mathbf{I}\Pi\mathbf{Y}_n^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}[48 \;\; 76 \;\; 96 \;\; 124]^T = \begin{bmatrix} 86 \\ 14 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Wyniki obliczeń pozwalają stwierdzić, że postać modelu dla zmiennych standaryzowanych jest następująca:

$$\overline{y} = 86 + 14t_1 + 24t_2\,.$$

By obliczyć parametry w modelu (10) wykorzystywane są zależności (11) i w efekcie:

$$\overline{y} = 86 + 14\left(\frac{u_1 - 4}{2}\right) + 24\left(\frac{u_2 - 7}{3}\right) = 2 + 7u_1 + 8u_2\,,$$

czyli

$$\overline{a_0} = 2,\ \ \overline{a_1} = 7,\ \ \overline{a_2} = 8\,.$$

Program ćwiczenia

1. Należy przeprowadzić symulacje obiektu sterowania o $s = 3$ wejściach i charakterystyce statycznej opisanej zależnością:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3\,. \tag{12}$$

2. Należy zaplanować czynny eksperyment identyfikacyjny w przestrzeni $\underline{\mathbf{u}} = [u_1,\ u_2,\ u_3]^T$ oraz określić wartości wyjść dla kolejnych punktów doświadczenia przy założeniu planowania dwuwartościowego. Na podstawie obserwacji należy zidentyfikować współczynniki modelu:

$$\overline{y} = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3\,. \tag{13}$$

   Wykorzystać całkowity plan czynnikowy opisany zależnością (7).
   Symulacje należy przeprowadzić dla trzech przypadków:
   a) bez obecności zakłóceń,
   b) z zakłóceniami o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa i parametrach N(0; 0,25),
   c) z zakłóceniami o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa i parametrach N(0; 0,1).
3. W sprawozdaniu należy przedstawić oszacowania parametrów modelu oraz wyniki obliczeń:
   - stosunku korelacyjnego,
   - sumy resztowej,
   - wariancji współczynników modelu,
   - przedziałów ufności estymowanych parametrów na poziomie ufności 95%

   oraz wnioski z przeprowadzonego ćwiczenia.

UWAGA: Wszystkie obliczenia należy zaprogramować i wykonać w środowisku MATLAB. Do wykonania ćwiczenia wykorzystać wybrane funkcje i skrypty opracowane w poprzednich ćwiczeniach.