Ćwiczenie 4

Temat: Identyfikacja parametryczna modeli stacjonarnych obiektów dynamicznych. Modele obiektów typu ARX

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z modelowaniem stacjonarnych obiektów dynamicznych z wykorzystaniem modelu typu ARX, estymacja parametrów oraz weryfikacja tych modeli.

Zagadnienia, których znajomość wymagana jest w ćwiczeniu

1. Model AR ciągu czasowego.
2. Szum biały.

Wprowadzenie

Model obiektu dynamicznego

Dla obiektu dynamicznego spełniającego następujące warunki:

– liniowość i stacjonarność zależności pomiędzy wejściem i wyjściem,
– wszystkie zakłócenia oddziałujące na obiekt sprowadzone są na wyjście i dodają się do wyjścia,

można podać następujące opis

$$x_i = -\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{T}}\underline{\boldsymbol{\omega}},$$

$$h_i = x_i + \zeta_i, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

przy czym:

h_i – wyjście obiektu; ω_i – sterowanie obiektu; ζ_i – zakłócenie,

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_{i-2} \\ \vdots \\ x_{i-r} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_{i-1} \\ \vdots \\ \omega_{i-s} \end{bmatrix},$$

ζ_i i = 1, 2, ... , n - zakłócenia nieskorelowane charakteryzowane przez rozkład normalny o

$$\mathrm{E}(\zeta_i) = 0, \qquad \mathrm{E}(\zeta_i^2) = \sigma^2 .$$

parametrach

Wykorzystując operator opóźnienia z^{-1}, dla rozpatrywanego obiektu można napisać:

$$h_i = \frac{B\left(z^{-1}\right)\omega_i}{A\left(z^{-1}\right)} + \frac{\nu_i}{A\left(z^{-1}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

gdzie: $A(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-1} + \ldots + \alpha_R z^{-R}$; $B(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-1} + \ldots + \beta_S z^{-S}$; $\nu_i = A\left(z^{-1}\right)\zeta_i$.

Składnik

$$\frac{\nu_i}{A\left(z^{-1}\right)}$$

reprezentuje zakłócenia. Modelem tych zakłóceń jest model AR. Dla rozpatrywanego przypadku zachodzi:

$$\frac{\nu_i}{A\left(z^{-1}\right)} = \zeta_i.$$

W omawianym przypadku można przyjąć model obiektu o postaci:

$$\bar{y}_i = \bar{\underline{\mathbf{p}}}^T \underline{\boldsymbol{\varphi}}_i, \tag{2}$$

gdzie: $\bar{\underline{\mathbf{p}}}^T = \left[\bar{a}_1, \quad \bar{a}_2, \quad \ldots, \quad \bar{a}_R, \quad \bar{b}_0, \quad \bar{b}_1, \quad \ldots, \quad \bar{b}_S\right]$,

$\underline{\boldsymbol{\varphi}}_i = \left[-y_{i-1}, \quad -y_{i-2}, \quad \ldots, \quad -y_{i-R}, \quad u_i, \quad u_{i-1}, \quad \ldots, \quad u_{i-S}\right]^T$.

$\bar{a}_i$ $i = 1, 2, 3, \ldots, R$ oraz $\bar{b}_i$ $i = 1, 2, 3, \ldots, S$ są estymatami współczynników $\underline{\alpha}_i$ $i = 1, 2, \ldots, R$, oraz $\underline{\beta}_i$ $i = 0, 1, 2, \ldots, S$ w wielomianach $A(z^{-1})$; $B(z^{-1})$.

Równanie (2) można zapisać następująco:

$$\bar{y}_i = -\bar{a}_1 y_{i-1} - \bar{a}_2 y_{i-2} - \ldots - \bar{a}_R y_{i-R} + \bar{b}_0 u_i + \bar{b}_1 u_{i-1} + \bar{b}_2 u_{i-2} + \ldots + \bar{b}_S u_{i-S}. \tag{3}$$

Wektor-wiersz wyjść modelu dla kolejnych n chwil czasowych, tj. wektor-wiersz $\bar{\mathbf{Y}}_n = \left[\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad \ldots, \quad \bar{y}_n\right]$ otrzymywany jest z zależności:

$$\bar{\mathbf{Y}}_n = \bar{\underline{\mathbf{p}}}^T \mathbf{\Phi}_n, \tag{4}$$

gdzie: $\mathbf{\Phi}_n = \left[\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_2, \quad \ldots, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\right]$.

Strukturę rozpatrywanego modelu obiektu dynamicznego charakteryzują parametry R oraz S (stopnie wielomianów $A(z^{-1})$ i $B(z^{-1})$).

Estymator parametrów modelu otrzymany na podstawie metody najmniejszych kwadratów określa zależność:

$$\bar{\underline{\mathbf{p}}} = \left(\mathbf{\Phi}_n \mathbf{\Phi}_n^T\right)^{-1} \mathbf{\Phi}_n \mathbf{Y}_n^T, \tag{5}$$

gdzie: $\mathbf{Y}_n = \left[y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n\right]$.

Weryfikacja modelu

Test białości błędów predykcji z wykorzystaniem wzoru Bartletta: Błąd predykcji wyjścia obiektu w chwili i określony jest wzorem

$$e_i = y_i - \bar{y}_i \,. \tag{6}$$

Wzór Bartletta dla szumu białego o wariancji $\lambda^2 = 1$ oraz $\tau > 0$ ma postać

$$\sigma_{R(\tau)} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

gdzie: $R(\tau)$ - ocena funkcji autokorelacji szumu dla przesunięcia τ, obliczana ze wzoru:

$$R(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=\tau+1}^{n} e_i e_{i-\tau}, \tag{8}$$

$\sigma_{R(\tau)}$ – odchylenie standardowe oceny funkcji autokorelacji $R(\tau)$.

Jeżeli dla procesu stochastycznego błędów predykcji wyjścia obiektu ma miejsce:

$$\frac{\bar{R}(\tau)}{\bar{R}(0)} \in \left(-\frac{3}{\sqrt{n}}, \frac{3}{\sqrt{n}} \right), \tag{9}$$

to ten proces stochastyczny można uznać za szum biały.

Test uwarunkowania macierzy $\mathbf{\Phi\Phi}^T$: Test uwarunkowania macierzy $\mathbf{\Phi\Phi}^T$ polega na badaniu stosunku:

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \tag{10}$$

gdzie: $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ - odpowiednio minimalna i maksymalna wartość własna macierzy $\mathbf{\Phi\Phi}^T$.

Im bliższa 1 jest obliczona wartość rozpatrywanego stosunku, tym lepsze jest uwarunkowanie macierzy $\mathbf{\Phi\Phi}^T$.

Kryterium informacyjne Akaikego (Akaike Information Criterion) - AIC: W omawianej procedurze badany jest wskaźnik

$$\mathrm{AIC} = n \log \mathrm{V}(\underline{p}) + 2s \,, \tag{11}$$

gdzie: s – liczba parametrów modelu, $\mathrm{V}(\underline{p})$ - funkcja strat (kosztów), określona za pomocą wzoru

$$\mathrm{V}(\underline{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}_i \right)^2 . \tag{12}$$

Wskaźnik AIC osiąga minimum dla poprawnej lub zbliżonej do poprawnej struktury modelu.

Dla najlepszego modelu wybranego z wykorzystaniem kryterium informacyjnego Akaikego proces stochastyczny błędów predykcji powinien być szumem białym. Dla tego modelu należy więc przeprowadzić test na białość procesu stochastycznego błędów predykcji.

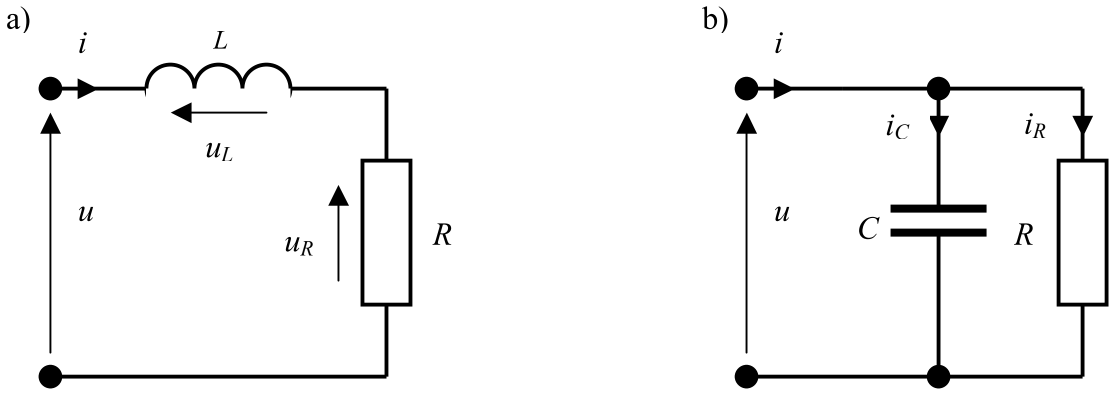
Przykłady

Model układu elektrycznego R-L

Schemat układu elektrycznego R-L przedstawiony jest na rys. 1a. Równanie opisujące model ciągły tego układu ma postać:

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t), \tag{13}$$

gdzie: t – czas, L – indukcyjność; R – rezystancja.



Rys. 1. Schematy układów elektrycznych: a) R-L, b) R||C.

Przyjmując, że napięcie $u(t)$ oraz prąd $i(t)$ są rozpatrywane w dyskretnych momentach czasu, na podstawie równania (13) można napisać:

$$u_k = L\frac{i_k - i_{k-1}}{T} + Ri_k\,, \tag{14}$$

$$u_k = \left(\frac{L}{T} + R\right)i_k - \frac{L}{T}i_{k-1}\,, \tag{15}$$

gdzie: T – okres próbkowania (dostatecznie mały); $T = \frac{1}{f_p}$; k=1, 2,…, n; n - liczba obserwacji.

Traktując jako wejście obiektu napięcie $u(t)$, a jako wyjście prąd $i(t)$ równanie (15) można przedstawić w postaci:

$$i_k = \frac{L}{L+RT}i_{k-1} + \frac{T}{L+RT}u_k\,. \tag{16}$$

Postać macierzowa równania (16) jest następująca:

$$i_k = \left[\frac{L}{L+RT}, \quad \frac{T}{L+RT} \right] \begin{bmatrix} i_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

oraz

$$i_k = \underline{\bar{\mathbf{p}}}_{RL}^T \underline{\boldsymbol{\varphi}}_k .$$

Macierz $\boldsymbol{\Phi}_{RL} = \lfloor \underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_2, \quad \ldots, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n \rfloor$ przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\Phi}_{RL} = \begin{bmatrix} 0 & i_1 & \ldots & i_{k-1} & i_k & \ldots & i_{n-1} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_k & u_{k+1} & \ldots & u_n \end{bmatrix}, \tag{18}$$

a wektor-wiersz wyjść:

$$\mathbf{Y}_n = \left[i_1, i_2, \quad \ldots, \quad i_k, \quad i_{k+1}, \quad \ldots, \quad i_n \right]. \tag{19}$$

Parametry modelu obliczane są ze wzoru:

$$\underline{\bar{\mathbf{p}}}_{RL} = \left(\boldsymbol{\Phi}_{RL} \boldsymbol{\Phi}_{RL}^T \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{RL} \mathbf{Y}_n^T . \tag{20}$$

Model układu elektrycznego R||C

Schemat układu elektrycznego R||C przedstawiony jest na rys. 1b. Równanie opisujące model ciągły tego układu ma postać:

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) = C \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{R}, \tag{21}$$

gdzie: t – czas, C – pojemność; R – rezystancja.

Przyjmując, że napięcie $u(t)$ oraz prąd $i(t)$ są rozpatrywane w dyskretnych momentach czasu, na podstawie równania (21) można napisać:

$$i_k = C \frac{u_k - u_{k-1}}{T} + \frac{u_k}{R}, \tag{22}$$

$$i_k = \left(\frac{C}{T} + \frac{1}{R} \right) u_k - \frac{C}{T} u_{k-1} . \tag{23}$$

We wzorach (22) i (23) za wielkość wejściową uznane zostało napięcie, za wielkość wyjściową – prąd.

Wzór (23) można także zapisać w postaci:

$$i_k = \left[\frac{C}{T} + \frac{1}{R}, \quad \frac{C}{T} \right] \begin{bmatrix} u_k \\ -u_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

i dalej jako:

$$i_k = \underline{\bar{\mathbf{p}}}_{RC}^T \underline{\boldsymbol{\varphi}}_k . \tag{25}$$

Macierz $\mathbf{\Phi}_{RC} = \lfloor \underline{\varphi}_1, \quad \underline{\varphi}_2, \quad \ldots, \quad \underline{\varphi}_n \rfloor$ przyjmuje postać:

$$\mathbf{\Phi}_{RC} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_k & u_{k+1} & \ldots & u_n \\ 0 & -u_1 & \ldots & -u_{k-1} & -u_k & \ldots & -u_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

a wektor-wiersz wyjść:

$$\mathbf{Y}_n = [i_1, i_2, \quad \ldots, \quad i_k, \quad i_{k+1}, \quad \ldots, \quad i_n]. \tag{27}$$

Parametry modelu obliczane są z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów:

$$\underline{\bar{\mathbf{p}}}_{RC} = \left(\mathbf{\Phi}_{RC}\mathbf{\Phi}_{RC}^T\right)^{-1}\mathbf{\Phi}_{RC}\mathbf{Y}_n^T . \tag{28}$$

Przykład obliczeniowy

Sformułowanie zadania: Dla obiektu dynamicznego, dla którego w tabeli 1 podane są pomiary wejścia (sterowania) u i wyjścia y, wyznaczyć współczynniki a_1 i b_0 modelu opisanego równaniem:

$$y_i - a_1 y_{i\text{-}1} = b_0 u_i.$$

Tabela 1. Pomiary wejścia u i wyjścia y identyfikowanego obiektu dynamicznego

i	1	2	3	4	5	6
u(i)	1	2	3	4	5	6
y(i)	1.2	0.75	0.45	0.3	0.15	0.1

Rozwiązanie zadania: Równanie modelu w postaci macierzowej przyjmuje postać:

$$y_i = \bar{\mathbf{p}}^T \underline{\varphi}_i = [a_1 \quad b_0]\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix}, \ i=1, 2,\ldots, n. \tag{29}$$

W celu znalezienia współczynników modelu wykorzystywany jest wzór (5). Dla warunków zadania, dla n=6 pomiarów:

$$\Phi_6 = [\underline{\varphi}_1, \quad \underline{\varphi}_2, \quad \underline{\varphi}_3, \quad \underline{\varphi}_4, \quad \underline{\varphi}_5, \quad \underline{\varphi}_6] = \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 0.75 & 0.45 & 0.3 & 0.15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\mathbf{Y}_6 = [1.2 \quad 0.75 \quad 0.45 \quad 0.3 \quad 0.15 \quad 0.1]. \tag{31}$$

Po wykonaniu obliczeń:

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.019 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Równanie modelu dla rozpatrywanych danych pomiarowych przyjmuje postać:

$$y_i - 0.542\, y_{i-1} = 0.019\, u_i.$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zaprogramować i wykonać obliczenia w celu ustalenia dyskretnego modelu obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu, dla którego wyniki pomiarów wejścia i wyjścia są podane w dostarczonych przez prowadzącego plikach:
   - *prad.txt* – plik z pomiarami prądów,
   - *nap.txt* – plik z pomiarami napięć,

   przy założeniu, że częstotliwość próbkowania jest równa 1 kHz.
   Rozpatrzyć przypadki obiektów pokazanych na rys. 1.
2. Przeprowadzić weryfikację znalezionych modeli, wykorzystując opisane w instrukcji testy.
3. Na podstawie parametrów znalezionego modelu dyskretnego ustalić parametry ciągłego modelu obiektu.
4. W sprawozdaniu należy przedstawić i omówić wyniki identyfikacji rozpatrywanego obiektu, zwracając szczególną uwagę na weryfikację modelu. We wnioskach należy podać, który z modeli okazał się najbardziej właściwy.

<u>UWAGA:</u> Wszystkie obliczenia należy zaprogramować i wykonać w środowisku MATLAB.