Ćwiczenie 5

Temat: Identyfikacja parametryczna modeli stacjonarnych obiektów dynamicznych. Metoda zmiennych instrumentalnych

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie z modelowaniem stacjonarnych obiektów dynamicznych z wykorzystaniem modeli parametrycznych, estymacja parametrów modeli za pomocą metody zmiennych instrumentalnych oraz weryfikacja modeli.

Wprowadzenie

Dla obiektu dynamicznego spełniającego warunki:
- liniowość i stacjonarność zależności pomiędzy wejściem i wyjściem,
- wszystkie zakłócenia oddziałujące na obiekt sprowadzone są na wyjście i dodają się do wyjścia,

dla którego nie obowiązuje zależność

$$h_i = \frac{B\left(z^{-1}\right)\omega_i}{A\left(z^{-1}\right)} + \frac{\nu_i}{A\left(z^{-1}\right)}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

gdzie:
h_i – wyjście obiektu; ω_i – sterowanie obiektu; ν_i – zakłócenie; $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ – wielomiany z^{-1},

lecz zależność

$$h_i = \frac{B\left(z^{-1}\right)\omega_i}{A\left(z^{-1}\right)} + \frac{C\left(z^{-1}\right)\nu_i}{A\left(z^{-1}\right)}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

gdzie:
h_i – wyjście obiektu; ω_i – sterowanie obiektu; ν_i – zakłócenie; $C(z^{-1})$ – wielomian z^{-1},

oszacowanie parametrów modelu

$$\bar{y}_i = \bar{\underline{\mathbf{p}}}^T \underline{\boldsymbol{\varphi}}_i, \tag{3}$$

gdzie:

$\bar{\underline{\mathbf{p}}}^T = \left[\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_R,\ \bar{b}_0,\ \bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{b}_S\right]$,

$\underline{\boldsymbol{\varphi}}_i = \left[-y_{i-1},\ -y_{i-2},\ \ldots,\ -y_{i-R},\ u_i,\ u_{i-1},\ \ldots,\ u_{i-S}\right]^T$.

$\bar{a}_i$ $i = 1, 2, 3, ..., R$ oraz $\bar{b}_i$ $i = 1, 2, 3, ..., S$ są estymatami współczynników $\underline{\alpha}_i$ $i = 1, 2, ..., R$, oraz $\underline{\beta}_i$ $i = 0, 1, 2, ..., S$ w wielomianach $A(z^{-1})$; $B(z^{-1})$, z wykorzystaniem estymatora

$$\underline{\bar{\mathbf{p}}} = \left(\mathbf{\Phi}_n \mathbf{\Phi}_n^T\right)^{-1} \mathbf{\Phi}_n \mathbf{Y}_n^T, \tag{4}$$

gdzie:
$\mathbf{\Phi}_n = \left[\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_2, \quad \ldots, \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\right]$,
$\mathbf{Y}_n = \left[y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n\right]$,

jest obciążone.

W celu rozwiązania problemu wyznaczania estymat parametrów modelu (3) stosowane są różne metody. Jedną z nich jest metoda zmiennych instrumentalnych. Przewiduje ona następujący schemat postępowania:

1. Wstępne wyznaczenie estymat parametrów modelu z wykorzystaniem estymatora (4).
2. Obliczenie $\bar{y}_{i,k}$ $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$; $k = 0$ tj. wyjścia modelu opisanego równaniem (3) dla oszacowanych parametrów dla wszystkich rozpatrywanych dyskretnych chwil.
3. Utworzenie macierzy zmiennych instrumentalnych

$$\mathbf{Z_k} = \left[\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{1k}} \ \ \underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{2k}} \ \ \ldots \ \underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{nk}}\right] \tag{5}$$

gdzie:
$k = k + 1$,

$$\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{ik}} = \left[-\bar{y}_{i-1,k-1}, \ldots, -\bar{y}_{i-r,k-1}, u_i, u_{i-1}, \ldots, u_{i-s}\right]^T. \tag{6}$$

4. Wyznaczenie estymaty parametrów modelu z wykorzystaniem estymatora

$$\underline{\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}} = \left(\mathbf{Z_k}\ \mathbf{\Phi_n^T}\right)^{-1} \mathbf{Z_k}\ \mathbf{Y_n^T}. \tag{7}$$

5. Gdy warunek zakończenia procesu wyznaczania estymat parametrów modelu nie jest spełniony, to obliczenie $\bar{y}_{i,k}$ $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ - wyjścia modelu dla znalezionych oszacowań parametrów dla wszystkich rozpatrywanych dyskretnych chwil, i przejście do punktu 3. Gdy warunek zakończenia procesu wyznaczania estymat parametrów modelu jest spełniony, to elementy wektora $\underline{\bar{\mathbf{p}}}_k$ są traktowane jako właściwe estymaty modelu identyfikowanego obiektu.

Przykład obliczeniowy

Sformułowanie zadania: Dla obiektu dynamicznego, dla którego w tabeli 1 podane są pomiary wejścia (sterowania) u i wyjścia y, wykorzystując metodę zmiennych instrumentalnych (pomocniczych), wyznaczyć parametry (a_1 i b_0) modelu opisanego równaniem:

$$\bar{y}_i + a_1 \bar{y}_{i-1} = b_0 u_1 \ . \tag{8}$$

Tabela 1. Pomiary wejścia u i wyjścia y identyfikowanego obiektu dynamicznego

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_i$	1.69	2.52	3.30	4.71	5.50	6.49	7.85	8.78	10.18	11.22

Rozwiązanie zadania: Równanie modelu w postaci macierzowej przyjmuje postać:

$$y_i = \bar{\mathbf{p}}^T \underline{\varphi}_i = \begin{bmatrix} a_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix}, i{=}1, 2,\ldots, n. \tag{9}$$

Zgodnie z metodą zmiennych instrumentalnych w celu znalezienia parametrów modelu początkowo wykorzystywany jest wzór (4). Dla warunków zadania, dla n = 10 pomiarów:

$$\begin{aligned}\Phi_{10} &= \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_1, & \underline{\varphi}_2, & \underline{\varphi}_3, & \underline{\varphi}_4, & \underline{\varphi}_5, & \underline{\varphi}_6, & \underline{\varphi}_7, & \underline{\varphi}_8, & \underline{\varphi}_9, & \underline{\varphi}_{10} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1.69 & 2.52 & 3.30 & 4.71 & 5.50 & 6.49 & 7.85 & 8.78 & 10.18 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{10} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.69 & 2.52 & 3.30 & 4.71 & 5.50 & 6.49 & 7.85 & 8.78 & 10.18 & 11.22 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{11}$$

Po wykonaniu obliczeń:

$$\bar{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,0} \\ \bar{b}_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3411 \\ 1.4473 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Z równania modelu (8) dla znalezionych oszacowań parametrów modelu wyznaczane są wartości sygnału wyjściowego dla kolejnych chwil. Dla pierwszych dwóch chwil obliczenia te są realizowane następująco:

$$\bar{y}_{1,0} = -0.3411\,\bar{y}_{0,0} + 1.4473\,u_1 = -0.3411*0 + 1.4473*1 = 1.4473\,,$$

$$\bar{y}_{2,0} = -0.3411\,\bar{y}_{1,0} + 1.4473\,u_1 = -0.3411*1.4473 + 1.4473*2 = 2.4009\,.$$

Dla wszystkich rozpatrywanych chwil czasowych wartości sygnału wyjściowego modelu podane są w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości sygnału wejściowego i sygnału wyjściowego modelu identyfikowanego obiektu dynamicznego

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_{i,0}$	1.4473	2.4009	3.5229	4.5874	5.6716	6.7491	7.8288	8.9078	9.987	11.0662

Macierz zmiennych instrumentalnych określona równaniem (5) dla $k = 1$ ma postać

$$\mathbf{Z}_1 = [\mathbf{z}_{1,1},\ \ \mathbf{z}_{2,1},\ \ \mathbf{z}_{3,1},\ \ \mathbf{z}_{4,1},\ \ \mathbf{z}_{5,1},\ \ \mathbf{z}_{6,1},\ \ \mathbf{z}_{7,1},\ \ \mathbf{z}_{8,1},\ \ \mathbf{z}_{9,1},\ \ \mathbf{z}_{10,1}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \bar{y}_{1,0} & \bar{y}_{2,0} & \bar{y}_{3,0} & \bar{y}_{4,0} & \bar{y}_{5,0} & \bar{y}_{6,0} & \bar{y}_{7,0} & \bar{y}_{8,0} & \bar{y}_{9,0} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1.4473 & 2.4009 & 3.5229 & 4.5874 & 5.6716 & 6.7491 & 7.8288 & 8.9078 & 9{,}987 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix},$$

Oszacowanie parametrów modelu z zależności (7), gdy wykorzystywana jest macierz zmiennych instrumentalnych $\mathbf{Z}_1$, jest następujące

$$\underline{\bar{\mathbf{p}}_1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1} \\ \bar{b}_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3960 \\ 1.5000 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Biorąc pod uwagę oszacowania parametrów (13), obliczane jest wyjście modelu, przy założeniu takich samych jak uprzednio wartości wejścia dla rozpatrywanych chwil czasowych. Konstruowana jest kolejna macierz zmiennych pomocniczych $\mathbf{Z}_2$. Szacowane są znowu parametry modelu. Przedstawione czynności powtarzane są tak długo, aż spełniony zostanie warunek zakończenia iteracyjnego procesu poszukiwania oszacowań parametrów modelu. W kolejnych iteracjach otrzymywane są oszacowania parametrów modelu pokazane w tabeli 3.

Tabela 3. Kolejne oszacowania parametrów modelu identyfikowanego obiektu dynamicznego

k	$\overline{a}_{1,k}$	$\overline{b}_{0,k}$
0	0.3411	1.4473
1	0.3960	1.5000
2	0.3951	1.4991
3	0.3951	1.4992

Ostatecznie równanie modelu dla identyfikowanego obiektu dynamicznego przyjmuje postać:

$$\overline{y}_i + 0.3951\,\overline{y}_{i\text{-}1} = 1.4992\,u_i \tag{14}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zaprogramować i wykonać obliczenia z wykorzystaniem metody zmiennych instrumentalnych w celu ustalenia dyskretnego modelu obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu, dla którego wyniki pomiarów wejścia i wyjścia są podane w dostarczonych przez prowadzącego plikach:
   - *wej.txt*,
   - *wyj.txt*.
2. Przeprowadzić weryfikację znalezionych modeli, wykorzystując testy opisane w instrukcji do poprzedniego ćwiczenia.
3. W sprawozdaniu należy przedstawić i omówić wyniki identyfikacji rozpatrywanego obiektu, zwracając szczególną uwagę na weryfikację modelu. Należy także opisać zastosowaną procedurę zakończenia iteracyjnego procesu wyznaczania estymat parametrów modelu.

<u>UWAGA:</u> Wszystkie obliczenia należy zaprogramować i wykonać w środowisku MATLAB.